334

F

334F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

صبح جمعه
۹۱/۱/۲۵

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل
در سال ۱۳۹۱

رشته‌ی
مهندسی مکانیک ـ طراحی کاربردی (دینامیک جامدات) (کد ۲۳۲۲)

نام و نام خانوادگی داوطلب: | شماره داوطلبی:

تعداد سؤال: ۴۵ | مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مکانیک محیط پیوسته، تئوری الاستیسیته)	۴۵	۱	۴۵

فروردین سال ۱۳۹۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- اگر جواب مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \ , \ -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} T_1 & , \ x > 0 \\ T_2 & , \ x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

را به صورت $u(x,t) = f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ جستجو کنیم، آنگاه $u(x,t) = A + B\psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ که در آن:

۱) $B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 + T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

۲) $B = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 + T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

۳) $B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 - T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

۴) $B = \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \ , \ A = \frac{T_1 + T_2}{2} \ , \ \psi(z) = \int_0^z e^{-s^2} ds$

۲- مسئله مقدار مرزی، با شرایط مرزی داده شده در داخل مستطیل $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f(x,y) \\ u(x,0) = 0 \ , \ u(x,b) = h(x) \\ u(0,y) = u(a,y) \ , \ u_x(0,y) = u_x(a,y) \end{cases}$$

که در آن f و h توابع پیوسته و تکّه‌ای هموار هستند، دارای کدام پایهٔ متعامد است؟ (نسبت به متغیر x)

۱) $\cos\frac{2k\pi x}{a} \ , \ \sin\frac{2k\pi x}{a} , k = 1,2,3,4,...$

۲) $1, \cos\frac{2k\pi x}{a} \ , \ \sin\frac{2k\pi x}{a} , k = 1,2,3,4,...$

۳) $1, \cos\frac{k\pi x}{a} \ , \ \sin\frac{k\pi x}{a} , k = 1,2,3,4,...$

۴) $\cos\frac{k\pi x}{a} \ , \ \sin\frac{k\pi x}{a} , k = 1,2,3,4,...$

۳- با یک تبدیل خطی کسری T سه نقطه $z_1 = -a , z_2 = 0 , z_3 = a$ از صفحه z به ترتیب به سه نقطه $w_1 = \infty , w_2 = -1 , w_3 = 0$ از صفحه w برده می‌شوند. ثابت a چه باشد تا ترکیب $T^2 = T \circ T = I$ تابع همانی شود؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۴- اگر بخواهیم دایره به مرکز α در صفحه w که از نقطه ۱ می‌گذرد، توسط نگاشت $w = \frac{z+1}{z-1}$ ، به عمودمنصّف قطعه خط واصل از ۱ به γ در صفحه z نگاشته شود آنگاه مقدار γ بر حسب α کدام است؟

۱) $\gamma = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ ۲) $\gamma = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ ۳) $\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ ۴) $\gamma = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

۵- در صورتی که جواب مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & , t > 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = 0 & , -\infty < x < \infty \end{cases}$$

به صورت:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} . f(\xi,\tau) d\xi \right] d\tau \qquad (1)$$

باشد، آنگاه جواب مسئله مقدار اولیه ـ مرزی:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & , \forall x > 0 , \forall t > 0 \\ u(x,0) = 0 , u(0,t) = 0 \end{cases}$$

نیز به صورت (۱) قابل نمایش است منتها به جای انتگرال داخل کروشه باید انتگرال زیر را جانشین نمود.

۱) $\int_0^{\infty} \left(e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) f(\xi,\tau) d\xi$

۲) $\int_0^{\infty} \left(e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) f(\xi,\tau) d\xi$

۳) $\int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} . f(\xi,\tau) d\xi$

۴) $\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} . f(\xi,\tau) - e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} . f(-\xi,\tau) d\xi \right]$

۶- با انتگرال‌گیری از تابع $\frac{e^{i\alpha z}}{e^z + e^{-z}}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$، نسبت به متغیر z روی مرز ناحیه $|x| \le R$, $0 \le y \le \pi$ در جهت مثبت، و سپس میل دادن R به بینهایت، تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{1}{\cosh x}$ به کدام صورت حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$

۲) $\frac{\frac{\pi}{2}}{\cosh(\pi\alpha)}$

۳) $\frac{\pi}{\cosh(\pi\alpha)}$

۴) $\frac{\frac{\pi}{2}}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$

۷- مسئله مقدار اولیه ـ مرزی به صورت

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & , \quad 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & , \quad 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = 0 \ , \ u(L,t) = 0 & , \quad t > 0 \end{cases}$$

داده شده است که در آن توابع $\phi(x)$ و $f(x,t)$ پیوسته و تکّه‌ای هموار فرض شده‌اند. پایهٔ متعامد نسبت به متغیر x در این مسئله کدام است؟

۱) $\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$

۲) $\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$

۳) $\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2L}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$

۴) از پایه کامل استفاده نمی‌شود، بلکه در بازه $0 \le x \le L$ بخشی از یک پایه متعامد به کار گرفته می‌شود.

۸- اگر برای مسئله مقدار اولیه ـ مرزی

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & , \quad 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_x(0,t) = 0 \ , \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

کاندید جواب به صورت

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2L}$$

قابل بیان باشد، به ازای تابع

$$f(x,t) = \sin\gamma t.\cos\frac{\pi x}{2L}$$

جواب مسئله کدام است؟ (قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{\pi}{2L}$)

۱) $\left[\frac{-\gamma}{\gamma^2+\alpha^4}\cos(\gamma t) + \frac{\alpha^2}{\gamma^2+\alpha^4}\sin(\gamma t) + \frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha^4}e^{-\alpha^2 t}\right]\cos(\alpha x)$

۲) $\left[\frac{-\gamma}{\gamma^2+\alpha^4}\cos(\gamma t) + \frac{\alpha^2}{\gamma^2+\alpha^4}\sin(\gamma t) - \frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha^4}e^{-\alpha^2 t}\right]\cos(\alpha x)$

۳) $\left[\frac{-\gamma}{\gamma^2+\alpha^4}\cos(\gamma t) + \frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha^4}e^{-\alpha^2 t}\right]\cos(\alpha x)$

۴) $\left[\frac{-\gamma}{\gamma^2+\alpha^2}\cos(\gamma t) + \frac{\alpha}{\gamma^2+\alpha^2}\sin(\gamma t) + \frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha^2}e^{-\alpha^2 t}\right]\cos(\alpha x)$

۹- پتانسیل الکترواستاتیک کراندار V در نیمه بالایی صفحه xy در معادله دیفرانسیل لاپلاس صدق می‌کند با شرایط مرزی $V(x,0)=A_0$ به ازای $x>0$ و $V(x,0)=2A_0$ به ازای $x<0$. اگر نقاط $P=(1,1)$ و $Q=(1,\sqrt{3})$ با مختصات دکارتی را در نظر بگیریم، اختلاف پتانسیل $V(Q)-V(P)$ کدام است؟ (A_0 ثابت)

۱) $\frac{A_0}{8}$

۲) $\frac{A_0}{12}$

۳) $\frac{A_0}{24}$

۴) $\frac{A_0}{6}$

۱۰- دمای مانای کراندار $T(u,v)$ در نیم صفحه $v\geq 0$ را چنان بیابید که بر قسمت $u<-1$ ، $v=0$ از کرانه شرط $T=b$ ، و بر قسمت $u>1$ ، $v=0$ از کرانه شرط $T=a$ (a و b ثابت حقیقی)، و پاره‌خط $-1<u<1$ ، $v=0$ از کرانه نیم صفحه، عایق باشد؟

۱) $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\pi}\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{(u+1)^2+v^2}-\sqrt{(u-1)^2+v^2}}{2}$

۲) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{(u+1)^2+v^2}-\sqrt{(u-1)^2+v^2}}{2}$

۳) $\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{v}{u}$

۴) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{\pi}\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{(u+1)^2+v^2}-\sqrt{(u-1)^2+v^2}}{2}$

۱۱- اگر بسط به سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=\sin x$ ، $0<x<\pi$ به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos(nx)$$

آنگاه مقدار سری $\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2-8}{4}$

۲) $\frac{\pi^2-8}{8}$

۳) $\frac{\pi^2-8}{16}$

۴) $\frac{\pi^2-8}{2}$

۱۲- اگر $P_n(x)$ به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، یک چند جمله‌ای لژاندر درجه n را نمایش دهد، آنگاه مقدار $I_k = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2)P_{2k-1}(x)dx$ کدام است؟ $(k \geq 1)$

۱) $I_k = \begin{cases} 0 & , k = 1 \\ -\frac{2}{3} & , k = 2 \\ 0 & , k > 2 \end{cases}$

۲) $I_k = \begin{cases} 0 & , k = 1 \\ \frac{1}{2k-1} & , k \geq 2 \end{cases}$

۳) $I_k = \begin{cases} 0 & , k > 2 \\ \frac{1}{3} & , k = 2 \\ 0 & , k = 1 \end{cases}$

۴) $I_k = 0$ به ازای هر $k \in \mathbb{N}$

۱۳- اگر $\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2+4)(z-4)} = 2\pi i M$، که در آن C مرز دایره $|z| = 3$ در جهت مثبت است، در این صورت مقدار انتگرال مذکور بر روی مرز $C_1 : |z+1| + |z-1| = 4\sqrt{2}$ در جهت مثبت کدام است؟

۱) $2\pi i\left(M - \frac{e^4}{20}\right)$

۲) $2\pi i\left(M + \frac{e^4}{20}\right)$

۳) $2\pi i M$

۴) قضیه مانده را نمی‌توان در مورد انتگرال مذکور روی C_1 به کار برد.

۱۴- اگر توابع $u(x,t)$ و $v(x,t)$ جواب‌های مسائل مقدار اولیه ـ مرزی زیر باشند:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \qquad t > 0 \\ u_t(x,0) = a\cos\frac{x}{2} + b\sin\frac{x}{2} = \phi(x) \\ u(0,t) = at \ , \ u(\pi,t) = bt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = \phi(x) - a\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) - \frac{x}{\pi}b \\ v(0,t) = 0 = v(\pi,t) \end{cases}$$

آنگاه $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ برابر کدام یک از گزینه‌هاست؟

۱) $at(\pi - x) + btx$

۲) $at\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + bt\frac{x}{\pi}$

۳) $a\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) + b\frac{x}{\pi}$

۴) $at\cos\frac{x}{2} + bt\sin\frac{x}{2}$

۱۵- آیا می‌توان بریدگی‌های شاخه تابع $f(z)=\frac{\log(1+z^2)}{(3z-i)^2}$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که انتگرال $I=\oint_C \frac{\mathrm{Log}(1+z^2)}{(3z-i)^2}dz$ بر مرز $C:\left|z-\frac{i}{3}\right|=\frac{1}{2}$ در جهت مثبت، با استفاده از مانده قابل محاسبه باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، مقدار انتگرال کدام است؟

۱) بریدگی‌های شاخه را نمی‌توان به طور مناسب اختیار کرد که انتگرال خواسته شده قابل محاسبه باشد.

۲) بریدگی‌های شاخه از نقاط $\pm i$ به سمت دور شدن از مبدء، و $I=-\frac{\pi}{3}$

۳) بریدگی‌های شاخه از نقاط $\pm i$ به سمت دور شدن از مبدء، و $I=-\frac{\pi}{6}$

۴) بریدگی‌های شاخه را به هر ترتیبی انتخاب کنیم، انتگرال مذکور روی مرز داده شده با استفاده از مانده قابل محاسبه است.

۱۶- در معادله انتگرالی $u(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{\infty}h(x-\xi)u(\xi)d\xi$ توابع g و h مفروض و دارای تبدیل فوریه داده شده‌اند و $|\hat{h}(\omega)|<\mu$ به ازای $\mu<1$ ثابت می‌باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $u(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{\infty}h(x-\xi)g(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}h(x-\xi)g(x-\xi)h(\xi)d\xi+\cdots$

۲) $u(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{\infty}g(x-\xi)h(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}g(x-\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-\eta)h(\eta)d\eta\right]d\xi+\cdots$

۳) $u(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{\infty}h(x-\xi)g(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}h^2(x-\xi)g(\xi)d\xi+\cdots$

۴) $u(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{\infty}h(x-\xi)g(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}h(x-\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi-\eta)g(\eta)d\eta\right]d\xi+\cdots$

۱۷- با انتگرال‌گیری از تابع e^{iz^2} روی کرانه قطاع $0\le r\le R$ ، $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ در جهت مثبت، و میل دادن R به بینهایت، تعیین کنید مقادیر انتگرال‌های فرنل $I=\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx$ ، $J=\int_0^{\infty}\sin(x^2)dx$ کدام هستند؟

۱) $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

۲) $J=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$, $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۳) $J=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$, $I=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

۴) $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۱۸- تبدیل فوریه تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ که به صورت $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ تعریف می‌شود، کدام است؟

۱) πe^{ω}

۲) $\pi e^{-|\omega|}$

۳) $\pi e^{-\omega}$

۴) $\frac{\pi}{2}e^{-\omega}$

۱۹- تابع $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ را به صورت سری لوران به توان‌های $(z-2)$ بسط دهید.

الف) در ناحیه $0<|z-2|<1$ ب) در ناحیه $|z-2|>1$

۱) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$

(ب) سری لوران ندارد.

۲) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}+1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$

(ب) $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots$

۳) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$

(ب) $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots$

۴) (الف) $f(z)=(z-2)^{-1}-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots$

(ب) $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}+\frac{1}{(z-2)^5}+\cdots$

۲۰- ضریب z^n در سری لوران تابع $f(z)=\sin\left(z+\frac{1}{z}\right)$ کدام است؟

۱) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\sin(2\cos\theta)d\theta$

۲) $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\sin(2\cos\theta)d\theta$

۳) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\sin(2\cos\theta)d\theta$

۴) $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(n\theta)\sin(2\cos\theta)d\theta$

۲۱- مؤلفه‌های یک میدان برداری سرعت به صورت:

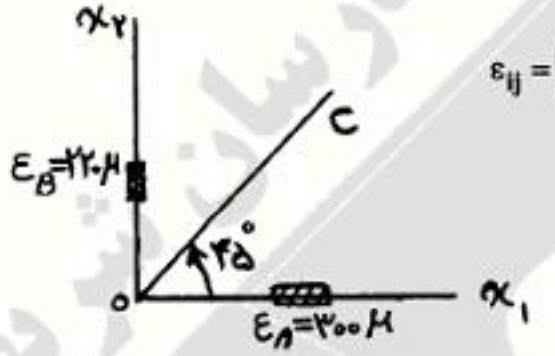
$$v_1 = 4x_3 - 3x_2 \ , v_2 = 3x_1 \ , v_3 = -4x_1$$

داده شده‌اند. این میدان برداری نمایشگر دوران جسم صلب با چه بردار سرعت زاویه‌ای است؟

۱) $\vec{\omega} = -4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$
۲) $\vec{\omega} = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$
۳) $\vec{\omega} = 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$
۴) $\vec{\omega} = 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$

۲۲- کرنش سنجی مطابق شکل زیر در نقطه O بر روی صفحه‌ای نصب و تانسور کرنش حاصله داده شده است. مقدار کرنش در جهت OC کدام یک از گزینه‌های داده شده است؟

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 300 & -90 \\ -90 & 220 \end{pmatrix}\mu$$



۱) $\varepsilon_{oc} = -350\mu$
۲) $\varepsilon_{oc} = 66\mu$
۳) $\varepsilon_{oc} = 40\mu$
۴) $\varepsilon_{oc} = -50\mu$

۲۳- تانسور تنش در نقطه P داده شده است. بردار تنش را بر روی صفحه $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$ که از نقطه P عبور می‌کند کدام یک از گزینه‌های داده شده است؟

$$\sigma_{ij)_P} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{pmatrix} ksi$$

۱) $\sigma_i \Rightarrow 6\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$
۲) $\sigma_i \Rightarrow 95\vec{e}_1 + 84\vec{e}_2 + 63\vec{e}_3$
۳) $\sigma_i \Rightarrow 95\vec{e}_1 + 63\vec{e}_3$
۴) $\sigma_i \Rightarrow 11\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$

۲۴- اگر A یک تانسور مرتبه دوم و A^T ترانهاده آن باشد کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) $A.A^T = A_{ij}A_{ij}$
۲) $A.A^T = A_{ij}A_{mn}$
۳) $A.A^T = A_{ij}A_{kj}$
۴) $A.A^T = A_{ij}A_{ji}$

۲۵- تانسور تنش به صورت $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ نشان داده شده است. کدام عبارت زیر صحیح است؟

۱) تانسور تنش همواره ترکیبی است از کشش و برش
۲) تانسور تنش را می‌توان به صورت یک برش ساده نمایش داد.
۳) تانسور تنش را می‌توان به صورت یک کشش ساده نمایش داد.
۴) تانسور تنش را هرگز نمی‌توان به صورت بالا نمایش داد.

۲۶- تانسور تنش به صورت $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ داده شده است. اگر $\sigma_{ij} = 0$ باشد، بردار واحد عمود بر صفحه‌ای که تنش عمودی بر آن صفر باشد، کدام است؟

۱) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

۲) $\left(\sqrt{\frac{1-\sigma_{22}-\sigma_{33}}{3}}, \sqrt{\frac{1-\sigma_{11}-\sigma_{33}}{3}}, \sqrt{\frac{1-\sigma_{11}-\sigma_{22}}{3}}\right)$

۳) $\left(\sqrt{\frac{1-\sigma_{11}}{3}}, \sqrt{\frac{1-\sigma_{22}}{3}}, \sqrt{\frac{1-\sigma_{33}}{3}}\right)$

۴) $\left(\sqrt{\frac{1+\sigma_{11}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sigma_{22}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sigma_{33}}{3}}\right)$

۲۷- اگر A یک تانسور مرتبه دوّم باشد، کدام یک از عبارات زیر با (دیورژانس A) $A.\nabla$ برابر است؟

۱) $\frac{\partial A_{ii}}{\partial X_i}$

۲) $\frac{\partial A_{ij}}{\partial X_k}$

۳) $\frac{\partial A_{ij}}{\partial X_j}$

۴) $\frac{\partial A_{ij}}{\partial X_i}$

۲۸- اگر λ و V مقدار و بردار ویژه تانسور مرتبه دوّم A باشند، مقدار و بردار ویژه تانسور A^{-1} به چه صورتی می‌باشند؟

۱) λ, V

۲) λ^{-1}, V^{-1}

۳) λ, V^{-1}

۴) λ^{-1}, V

۲۹- مشتق covariant بردار v^i کدام است؟

۱) $v^i|_j = v^i_{,j} + v^k \Gamma^i_{jk}$

۲) $v^i|_j = v^{i,j} - v^k \Gamma^i_{jk}$

۳) $v^i|_j = v^{i,j} + v^k \Gamma^i_{jk}$

۴) $v^i|_j = v^i_{,j} - v^k \Gamma^i_{jk}$

۳۰- حاصل عبارت $g_{i,j} \cdot g_k$ کدام است؟ ($g_{i,j}$ مشتق بردار پایه می‌باشد.)

۱) Γ_{ijk}

۲) $\Gamma_{ijk} g^k$

۳) $\Gamma^k_{ij} g_k$

۴) Γ^k_{ij}

۳۱- در چه صورتی رابطه $T_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta} = 0$ برقرار است؟

۱) هر دو تانسورهای مرتبه دوم متقارن باشند.

۲) $T_{\alpha\beta}$ باید تانسور مرتبه دوم متقارن و $E^{\alpha\beta}$ باید تانسور مرتبه دوم نامتقارن باشند.

۳) یک تانسور مرتبه سوم متقارن و دیگری تانسور مرتبه دوم نامتقارن باشند.

۴) هر دو تانسورهای مرتبه دوم نامتقارن باشند.

۳۲- شکل کامل معادله Navier کدام است؟

۱) $\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - \rho \ddot{u}_i = 0$

۲) $\mu u^i\|^j_j + (\lambda + \mu) u^j\|^i_j + \rho F^i - \rho \ddot{u}^i = 0$

۳) $\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho F_i - \rho \ddot{u}_i = 0$

۴) $\mu u^i\|^j_j + (\lambda + \mu) u^j\|^i_j - \rho \ddot{u}^i = 0$

۳۳- نماد christoftel، Γ_{ijk} از کدام رابطه زیر قابل محاسبه است؟

۱) $\frac{1}{2}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})$

۲) $2(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})$

۳) $2(-g_{jk,i} - g_{ki,j} + g_{ij,k})$

۴) $\frac{1}{2}(g_{jk,i} - g_{ki,j} + g_{ij,k})$

۳۴- چنانچه a_{ij} ثابت باشد، عبارت اندیسی $(a_{ij} x_i x_j)_{,k}$ برابر است با:

۱) $a_{ij} x_i + a_{jk} x_j$

۲) $a_{ik} x_i + a_{kj} x_j$

۳) $a_{jk} x_i + a_{ik} x_j$

۴) $a_{ki} x_i + a_{ij} x_j$

۳۵- مرتبه عبارت تانسوری داده شده چقدر است؟

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijr}A_{kr}$$

۱) صفر
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۳۶- روابط تعادل در حالت تنش صفحه‌ای در سیستم محورهای قائم به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+F_x=0$$
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+F_y=0$$

روابط تعادل در همین حالت در سیستم محورهای قطبی کدام است؟

۱)
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+F_R=0$$
$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta}+F_\theta=0$$

۲)
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+F_R=0$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+F_\theta=0$$

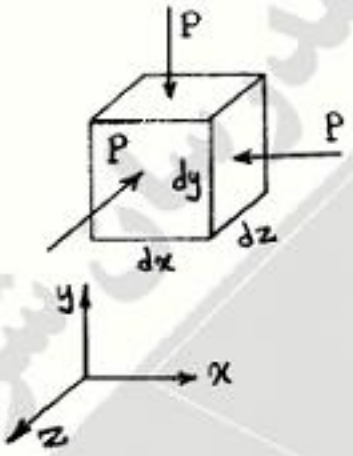
۳)
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}+F_R=0$$
$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}+F_\theta=0$$

۴)
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+F_R=0$$
$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+F_\theta=0$$

۳۷- المانی تحت فشار هیدرواستاتیک p (فشار برابر در سه راستا) قرار دارد. رابطهٔ کرنش حجمی $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ و فشار p به صورت:

$$\varepsilon = -\frac{p}{k}$$

است که در آن k مدول حجمی نامیده می‌شود. مقدار k چقدر است؟



۱) $\frac{E}{2(1+\nu)}$

۲) $\frac{E}{3(1-2\nu)}$

۳) $\frac{E}{2(1-\nu)}$

۴) $\frac{E}{3(1+2\nu)}$

۳۸- رابطه تنش ـ کرنش در حالت کامل سه محوری به صورت:

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_x$$
$$\sigma_y = \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_y$$
$$\sigma_z = \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_z$$

است که در آن λ ضریب لامه و $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ کرنش حجمی است. ضریب λ بر حسب مدول الاستیسیته E و نسبت پواسون ν کدام است؟

۱) $\lambda = \frac{E}{2(1+\nu)}$

۲) $\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

۳) $\lambda = \frac{E}{(1-\nu)(1+2\nu)}$

۴) $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

۳۹- در الاستیسیته خطی با فرض کرنش ـ کوچک، تغییر مکان کوچک، در حالت صفحه‌ای روابط کرنش ـ تغییر مکان به صورت زیر است:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

رابطه سازش (Compatibility Eq.) بر حسب کرنش کدام است؟

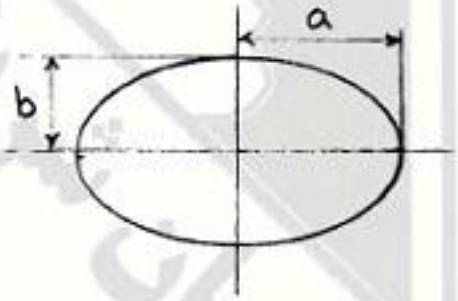
۱) $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$

۲) $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$

۳) $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$

۴) $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$

۴۰- یک میله منشوری با مقطع بیضی تحت پیچش خالص مفروض است. با فرض تابع تنش به صورت $\phi = \kappa\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$ مقدار κ را به گونه‌ای به دست آورید که شرط تابع تنش در پیچش را برآورده نماید؟



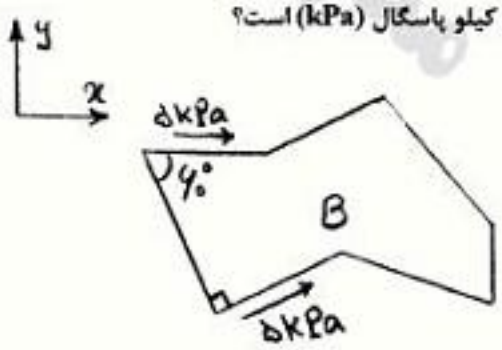
۱) $\kappa = \frac{G\alpha}{a^2 + b^2}$

۲) $\kappa = -\frac{2a^2 b^2 G\alpha}{a^2 + b^2}$

۳) $\kappa = -\frac{a^2 b^2 G\alpha}{a^2 + b^2}$

۴) $\kappa = -\frac{a^2 b^2 G\alpha}{2(a^2 + b^2)}$

۴۱- در المان نشان داده شده در نقطه‌ی B تنش برشی ماکزیمم مطلق چند کیلو پاسکال (kPa) است؟



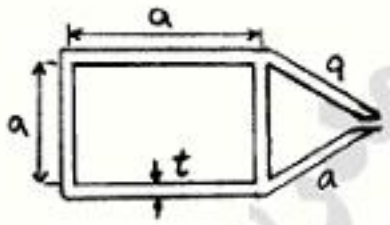
۱) ۴٫۱۳

۲) ۲۰

۳) ۱۰

۴) ۵

۴۲- مقطع نشان داده شده تحت گشتاور پیچشی T واقع شده است. در صورتی که ضخامت مقطع ثابت باشد چه سهمی از T توسط مربع تحمل می‌شود؟



۱) $\frac{a^2}{3a^2+t^2}T$

۲) $\frac{6at}{a^2+t^2}T$

۳) $\frac{3a^2}{3a^2+2t^2}T$

۴) $\frac{2a^2}{2a^2+3t^2}T$

۴۳- تانسور تنش روی سطح کره به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=14$ به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 4x \\ 2y & 4x & 1 \end{bmatrix}$ kPa می‌باشد. مؤلفه‌های تنش در نقطه‌ای از کره به مختصات $x=1$ و $y=2$ در ناحیه مثبت دستگاه کارتزین (x,y,z) کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\vec{\sigma}=1.25\vec{i}-3.18\vec{k}$

۲) $\vec{\sigma}=3.47\vec{i}+3.74\vec{j}+4\vec{k}$

۳) $\vec{\sigma}=2.57\vec{i}+4.13\vec{j}+2\vec{k}$

۴) $\vec{\sigma}=6.12\vec{i}-4\vec{j}-3.18\vec{k}$

۴۴- مؤلفه‌ی تانسور تنش در یک نقطه از جسم به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma & 3 & 4 \\ 3 & \sigma & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مقدار σ را طوری تعیین کنید که در این نقطه سطح آزاد از تنش وجود داشته باشد؟

۱) ۴٫۱۳

۲) ۵٫۸۳-

۳) صفر

۴) ۲٫۱۸

۴۵- ماکزیمم تنش برشی در یک نقطه $\tau_m = \frac{۶۵}{۲}$ ksi و $\sigma_{ii} = ۴$ ksi و کوچکترین تنش اصلی $\sigma_{(۳)} = -۳۹$ ksi می‌باشد. با فرض اینکه $\sigma_{(۱)} > \sigma_{(۲)} > \sigma_{(۳)}$ باشد سایر تنش‌های اصلی چند ksi است؟

۱) $\sigma_{(۱)} = ۱۳۵$ ksi ، $\sigma_{(۲)} = ۰$

۲) $\sigma_{(۱)} = ۳۲/۵$ ksi ، $\sigma_{(۲)} = ۱۰/۵$ ksi

۳) $\sigma_{(۱)} = ۲۶$ ksi ، $\sigma_{(۲)} = ۱۷$ ksi

۴) $\sigma_{(۱)} = ۴۳$ ksi ، $\sigma_{(۲)} = ۰$